



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 1a. Wprowadzenie

10.2025

Dr hab. inż. Piotr MAREK , prof. uczelni, pok. NL130, piotr.marek@pw.edu.pl

1. MES II (1W+1L)

2. Wykłady (7x2 godz.+1godz. na kolokwium)
3. Laboratoria komputerowe (15 godz.)
4. Konsultacje na MS Teams
5. W semestrze przewidziane 1 kolokwium (oceniane w skali od 0 do 5)
6. Zaliczenie wykładu – ocena min. 2,75 (3-)
7. Zaliczenie laboratorium – na zasadach ustalonych z prowadzącym lab.
8. Zaliczenie przedmiotu – wymagane zaliczenie obu części (wykład i lab.)

• **Ocena końcowa** = $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}L$

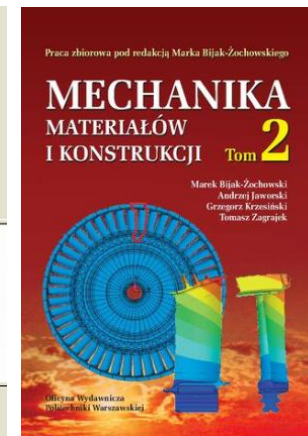
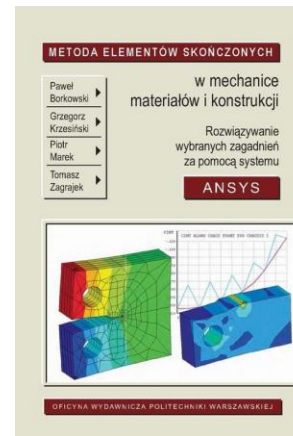
Metody przybliżone w analizie ośrodków ciągłych

Wykład (15h):

- Szacowanie błędów i adaptacyjne techniki remeshing.
- Stacjonarny przepływ ciepła i naprężenia termiczne.
- Wprowadzenie do dynamiki konstrukcji, drgania swobodne.
- Wyboczenie konstrukcji sprężystych, obciążenie krytyczne
- Zagadnienia nieliniowe w mechanice konstrukcji - podstawowe techniki numeryczne.
- Zagadnienia nieliniowe materiałowo
- Zagadnienia kontaktowe
- Materiały ortotropowe i struktury kompozytowe.
- Modelowanie parametryczne i optymalizacja projektu

Laboratorium komputerowe (15h):

Modelowanie prostych zagadnień: naprężenia termiczne, zagadnienia kontaktu, plastyczność i naprężenia własne, drgania swobodne, wyboczenia konstrukcji powłokowej, modelowania parametrycznego i optymalizacji kształtu



1. Bijak-Żochowski M., Jaworski A., Krzesiński G., Zagrajek T.: **Mechanika Materiałów i Konstrukcji**, Tom 2, Of. Wyd. PW, 2023
2. Borkowski P., Krzesiński G., Marek P., Zagrajek T.: **MES w mechanice materiałów i konstrukcji. Rozwiązanie wybranych zagadnień za pomocą programu ANSYS**, Oficyna Wydawnicza PW, 2022
3. Bathe, K.J.: Finite Element Procedures. 2nd ed. Prentice Hall Inc., 2014. https://web.mit.edu/kjb/www/Books/FEP_2nd_Edition_4th_Printing.pdf
4. Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in engineering practice, Prentice Hall Inc., 1981.
<https://soaneemrana.org/onewebmedia/Finite%20Element%20Procedures%20in%20Engineering%20Analysis%20Bathe%20K.J.pdf>
5. Huebner K.H., Dewhirst D.L., Smith D.E., Byrom T.G.: **The finite element method for engineers**, J. Wiley & Sons 2001
6. Kącki E.: **Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki**, Warszawa WNT 1992.
7. Kiełbasiński A., Schwetlick H.: **Numeryczna algebra liniowa**. WNT, 1992.
8. Kleiber M.(red): **Komputerowe metody mechaniki ciał stałych**, Warszawa PWN 1995.
9. Rakowski G., Kacprzyk Z.: **Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji**, Warszawa, Oficyna Wydawnicza PW, 1993.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.: **The Finite Element Method**. – różne wydania
<http://ceb.ac.in/knowledge-center/E-BOOKS/The%20Finite%20Element%20Method%20Vol1%20-%20The%20Basis%20-%20R.%20Taylor.pdf>

MES jako metoda przybliżona

Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą przybliżoną, którą można wykorzystać jako procedurę numeryczną do rozwiązywania problemów fizycznych, w tym:

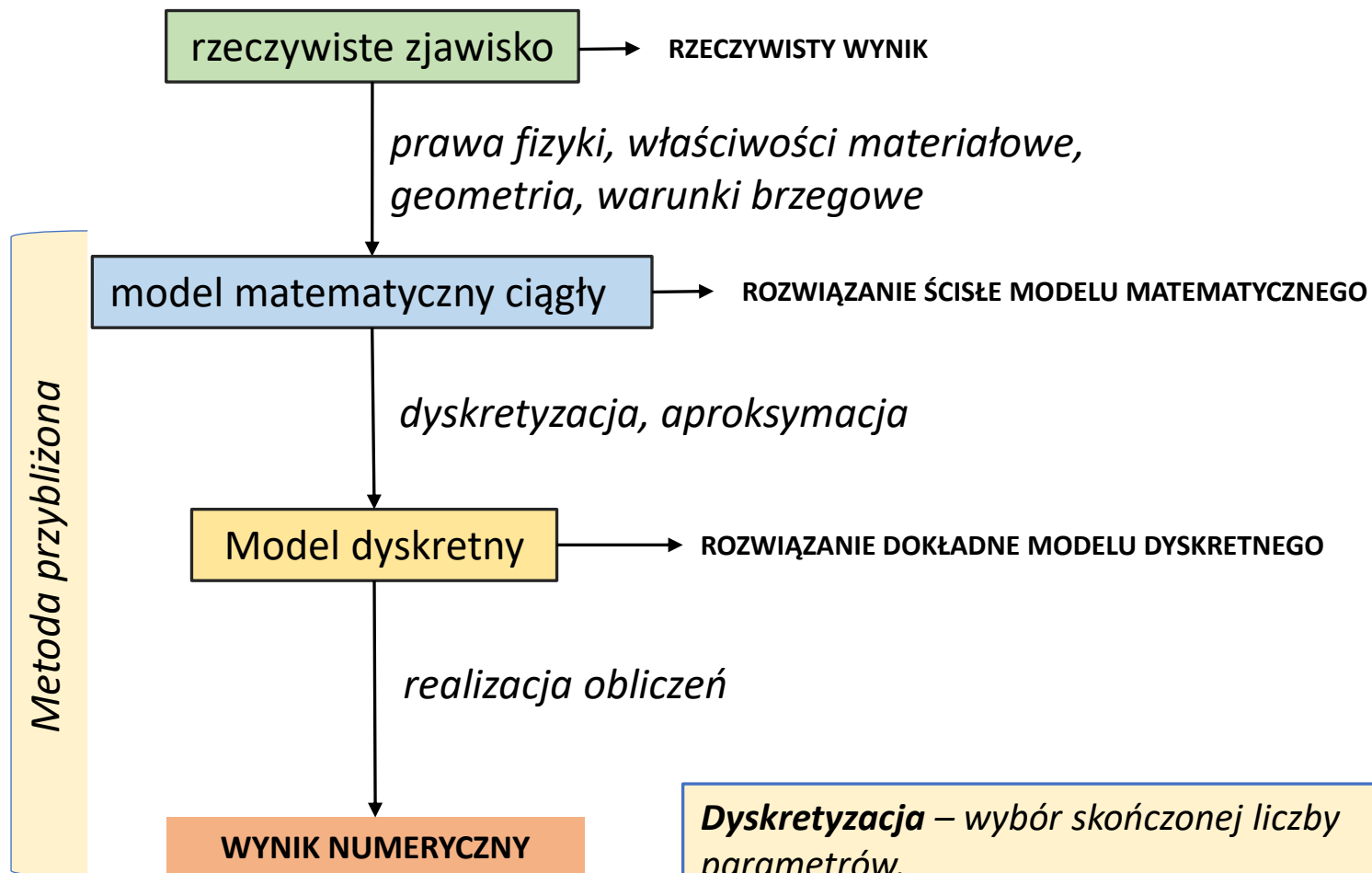
- mechaniki ciała stałego,
- wymiany ciepła,
- przepływu cieczy,
- elektromagnetyzmu,
- zagadnienia pól sprzężonych
- ...

MES został opracowany w latach 50 XX wieku w celu rozwiązywania problemów dla przemysłu cywilnego i lotniczego. Metoda stała się najpotężniejszym narzędziem analitycznym, głównie dzięki rozwojowi komputerów.

Cel wykładu MES2

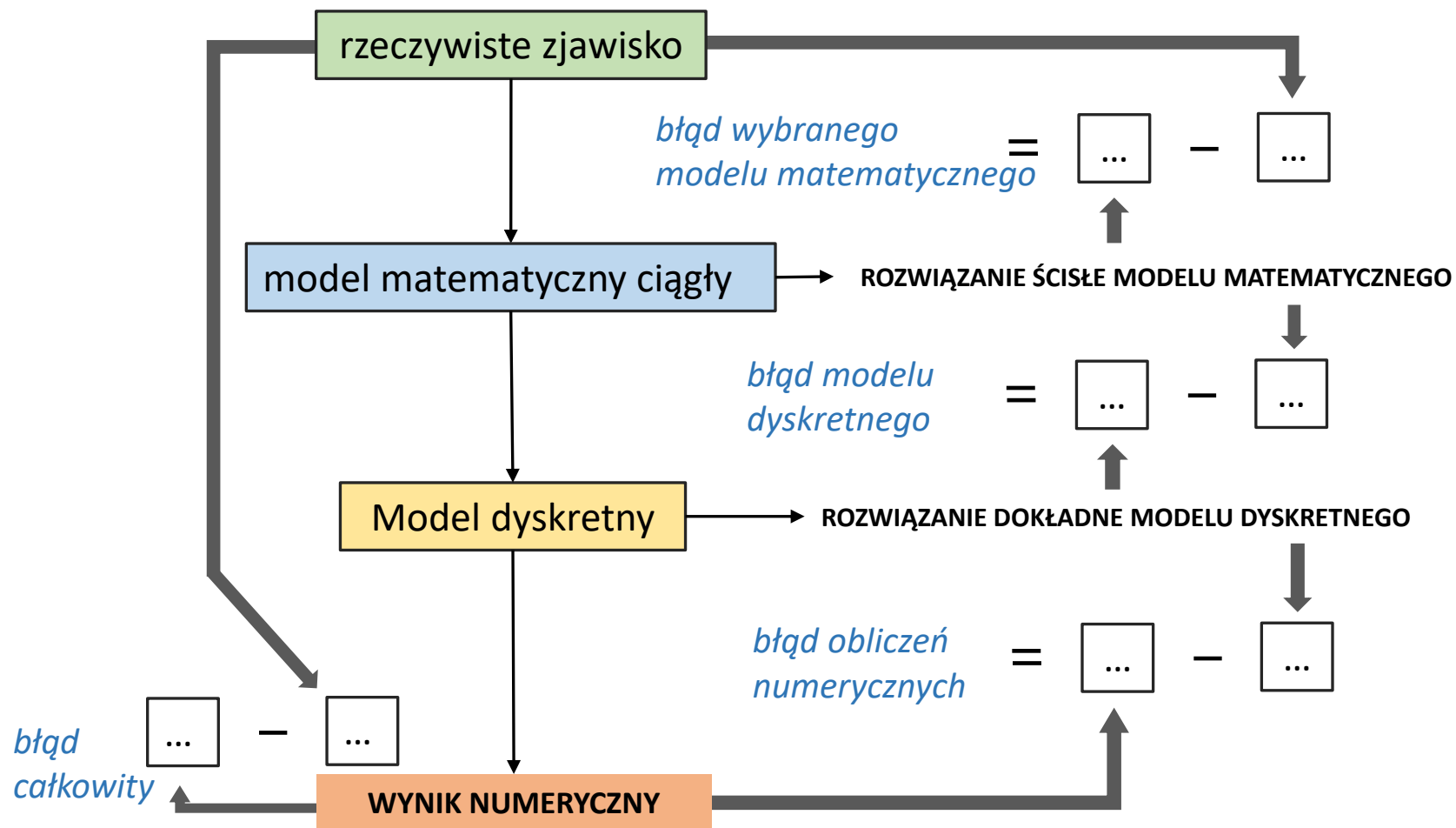
Przekazanie wiedzy wymaganej do zaawansowanych analiz wybranych zagadnień mechaniki konstrukcji metodą elementów skończonych.

Rozwiązanie zagadnienia analizy ośrodków ciągłych metodą przybliżoną (przypomnienie)

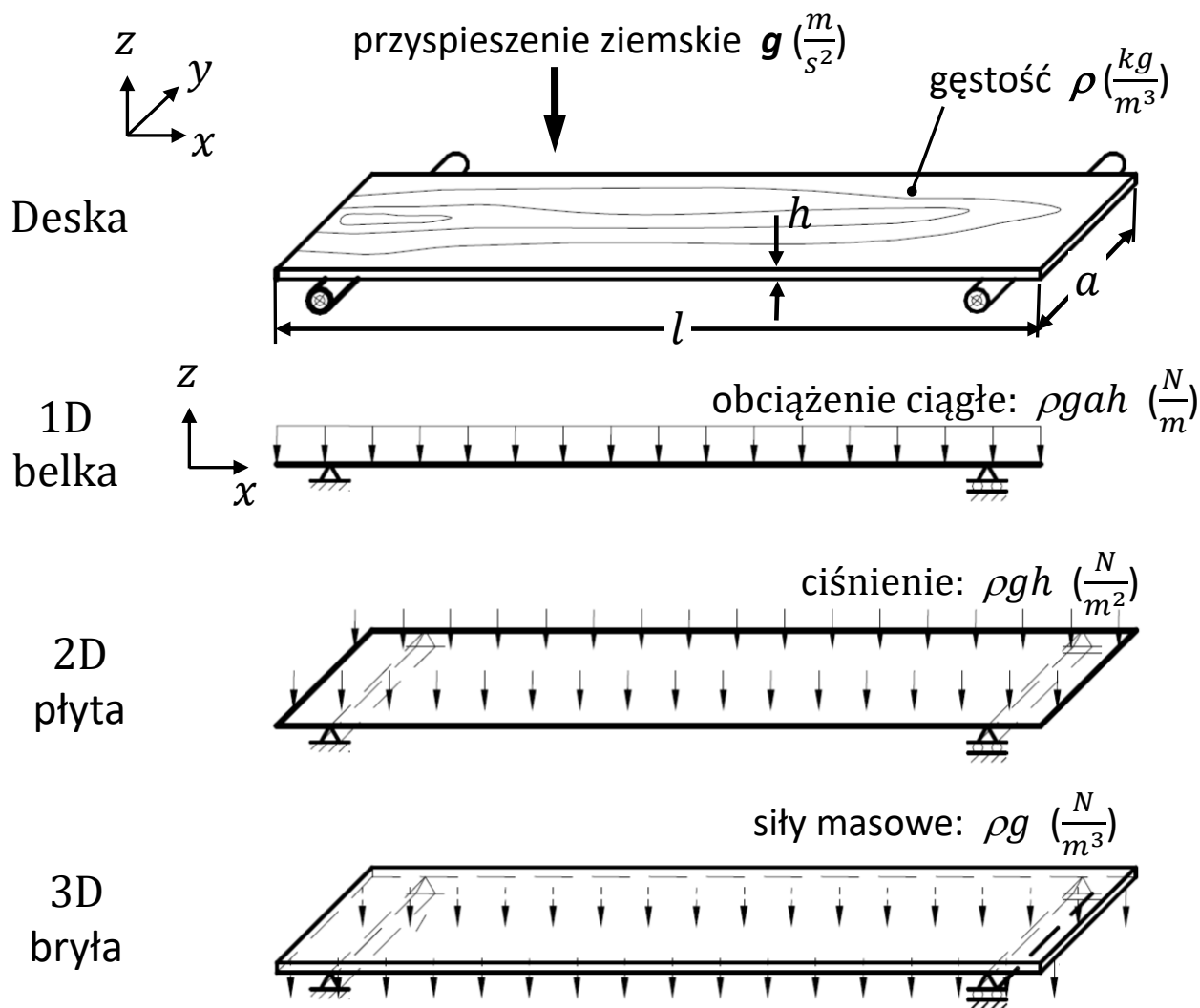


Dyskretyzacja – wybór skończonej liczby parametrów,
Aproksymacja – sposób opisu za pomocą z góry założonych prostych funkcji zależnych od poszukiwanych parametrów

Dokładność obliczeń MES – źródła błędów



Wybór modelu matematycznego – błąd modelu matematycznego



Założenia:

Własności materiału:

- *izotropowe,*
- *anizotropowe,*
- *lepkosprężyste,*

Duże ugięcia

Warunki brzegowe (kontakt)

Nie ma jednego
dobrego modelu!

Właściwy model zależy od:

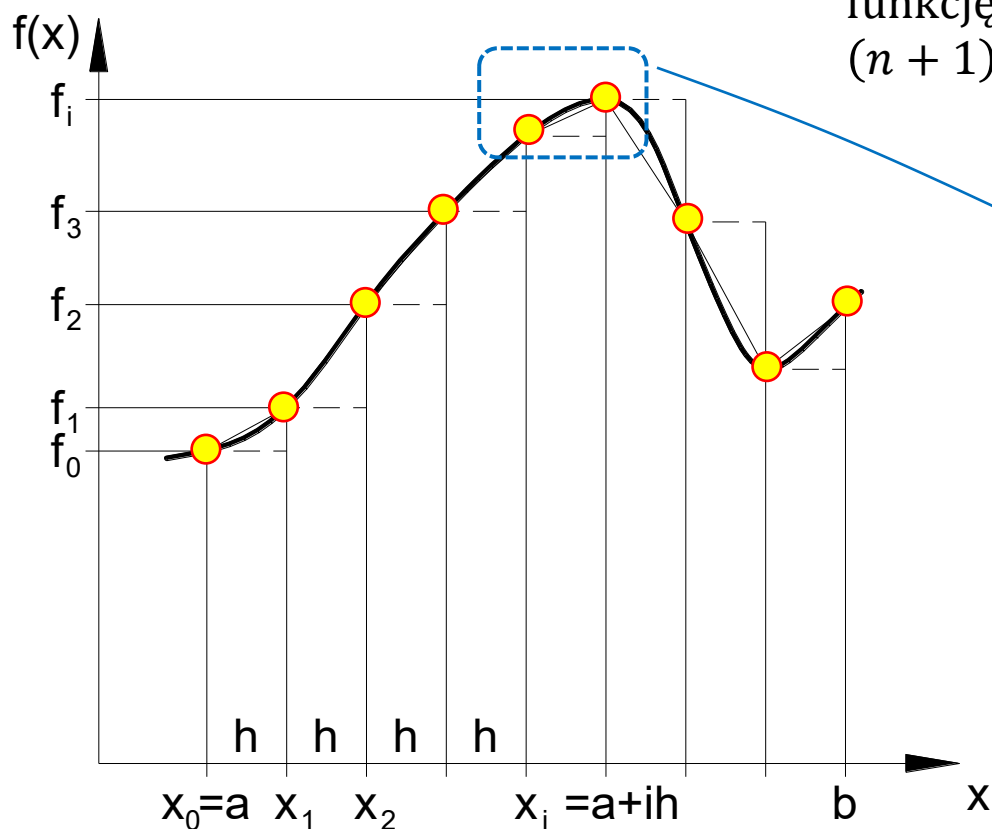
- *celu analizy,*
- *wymagań stawianych konstrukcji,*
- *żądanej dokładności wyników,*
- *dostępności danych materiałowych,*
- *dostępnych narzędzi obliczeniowych*

Dyskretyzacja i aproksymacja na przykładzie funkcji jednej zmiennej

dowolna funkcja: $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na n równych podprzedziałów o długości: $h = (b - a)/n$

funkcję ciągłą $f(x)$ reprezentuje zbiór
($n + 1$) wartości: $f(a + ih), i = 0, 1, 2, n$



Aproksymacja może być:

- stała (schodkowa),
- liniowa (łamana),
- funkcjami sklejanymi.

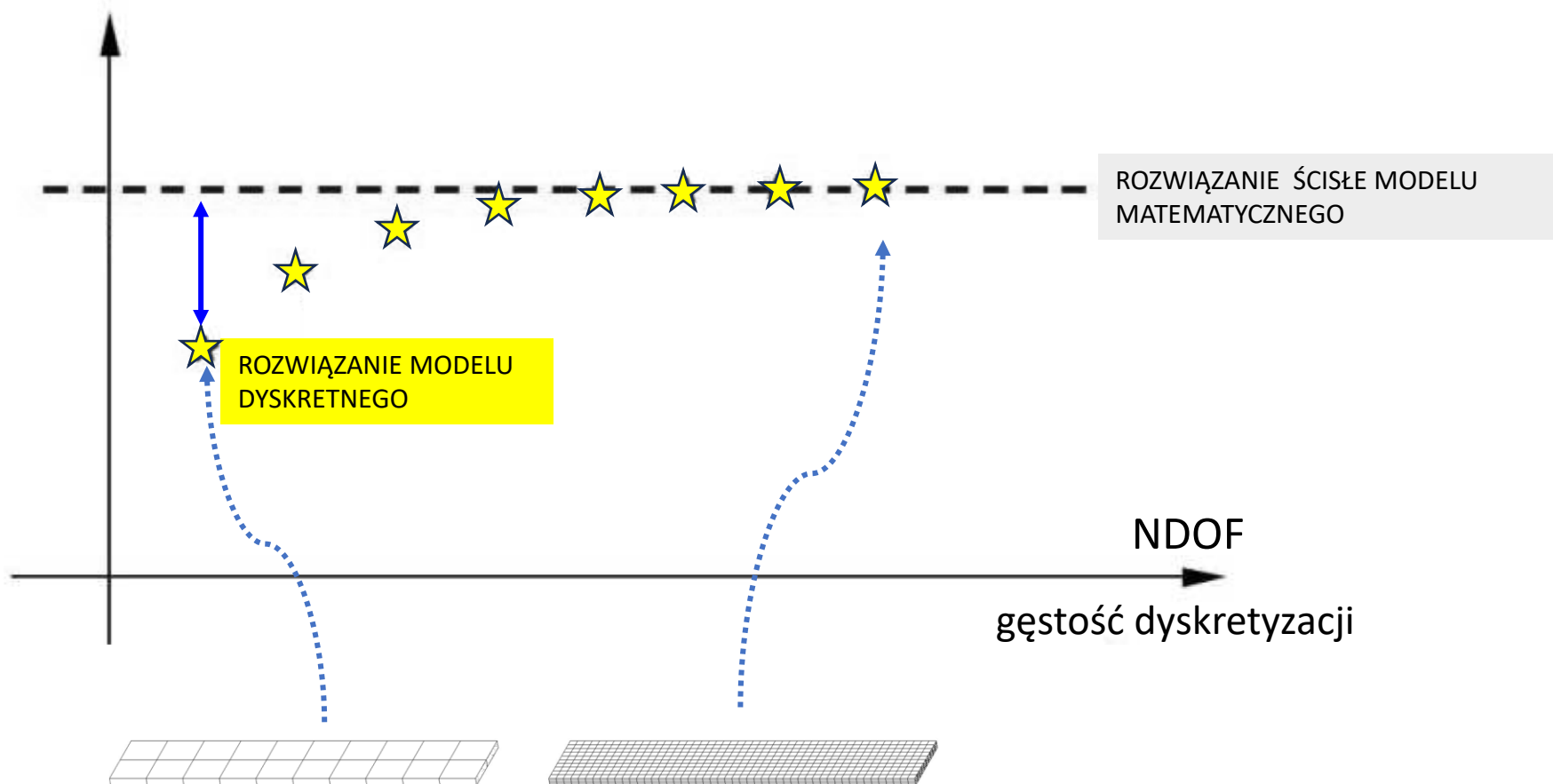
Wpływ dyskretyzacji – błąd modelu dyskretnego

Dyskretyzacja

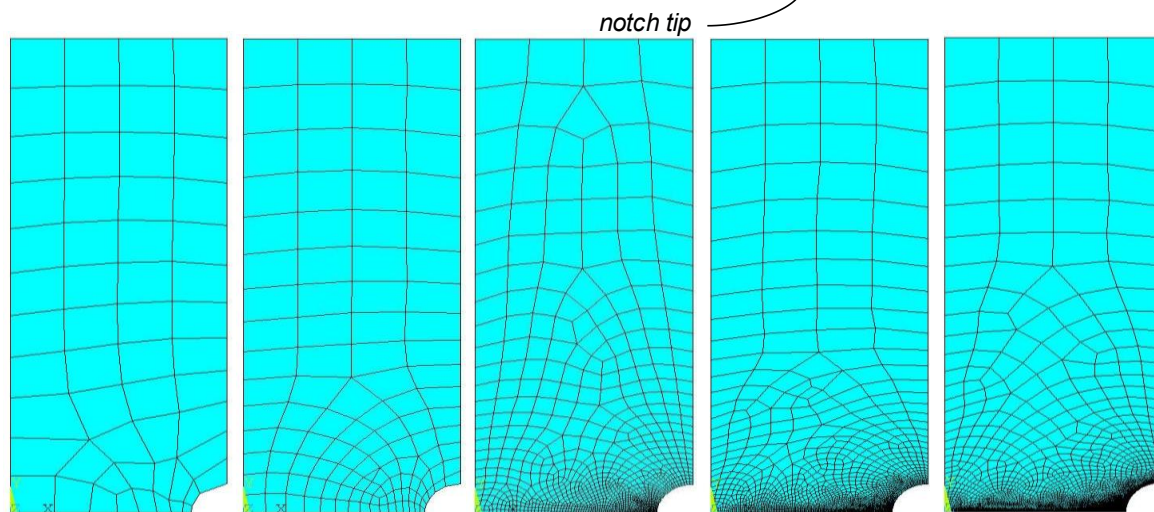
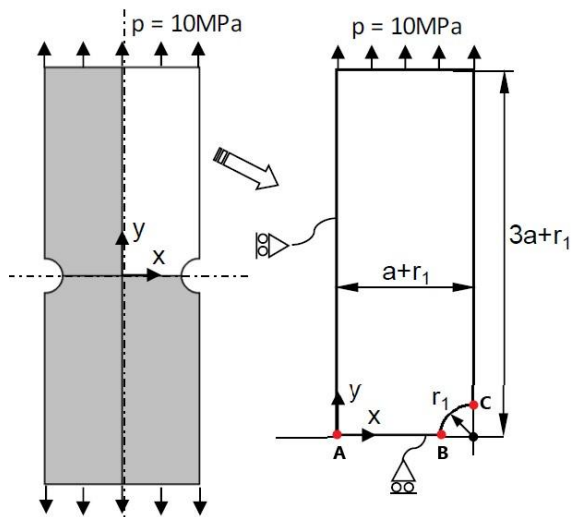
- rodzaj (mapped, free, sweep)
- gęstość

Typ elementu

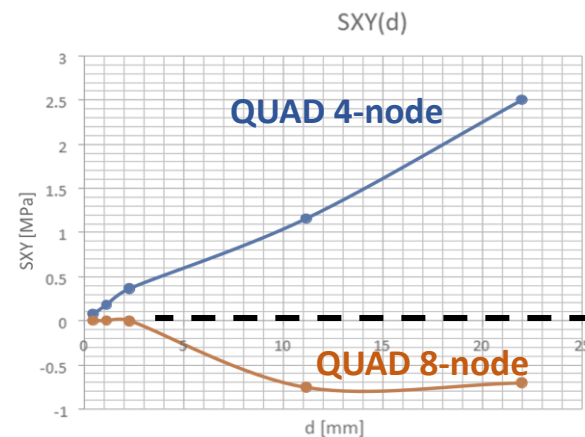
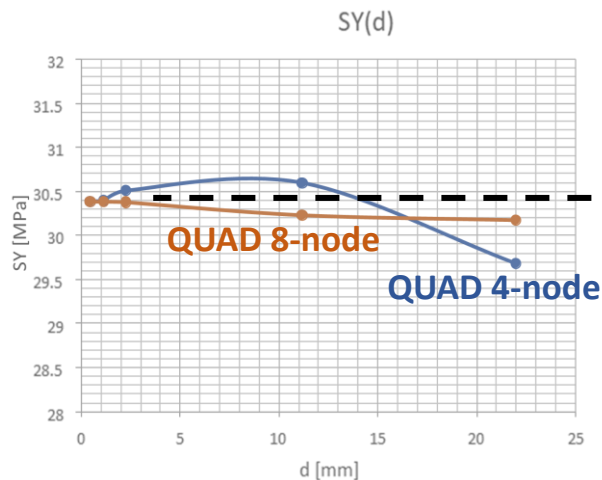
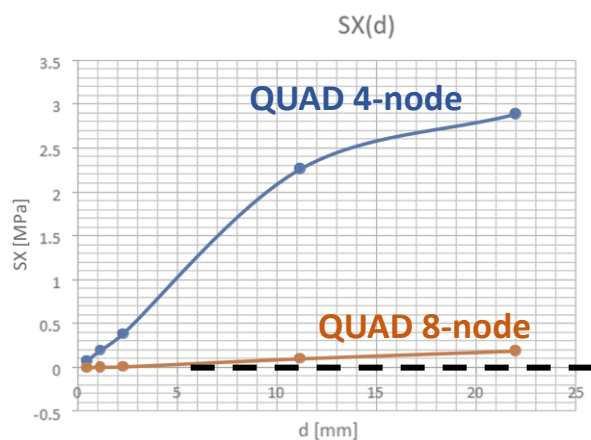
- funkcje kształtu
- schemat całkowania



Przykład Tarcza z karbem



Składowe naprężenia w wierzchołku karbu w funkcji rozmiaru elem. d (wyniki numeryczne)



--- EXACT SOLUTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Błąd numeryczny

- typ solvera
- wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$cond([K]) = \|[K]\| \cdot \|[K]^{-1}\|$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy pozwala na oszacowanie, z jaką (maksymalnie) dokładnością (do ilu miejsc po przecinku) możemy podać wynik.

- Błąd zaokrąglenia

W przybliżeniu, jeśli stopień uwarunkowania $cond([K]) = 10^k$, wówczas mogliśmy stracić maksymalnie k cyfr dokładności podczas rozwiązywania układu równań liniowych.

Jednak liczba warunkowa nie określa dokładnej wartości maksymalnej niedokładności, jaka może wystąpić w algorytmie.

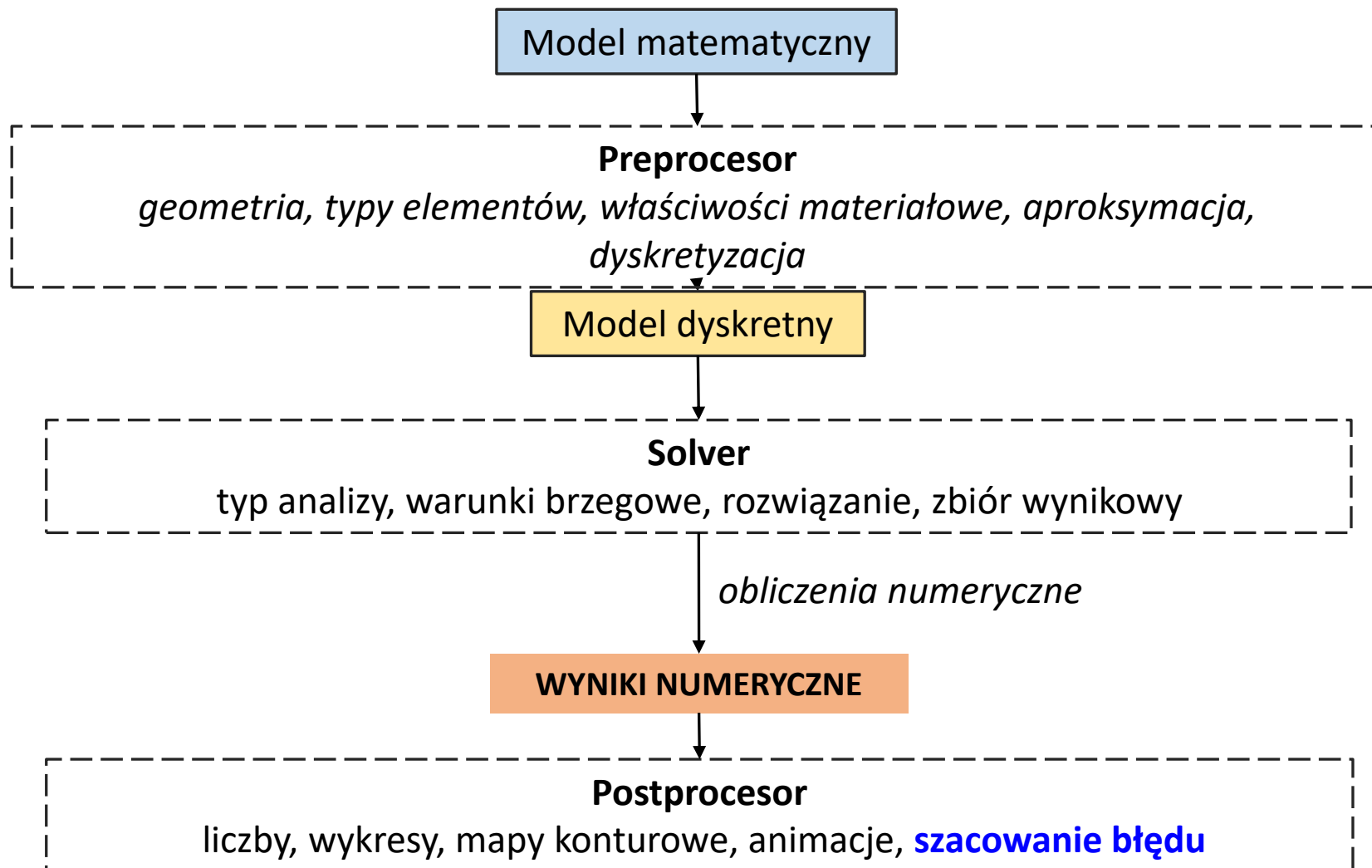
$$r \geq p - \log_{10} (cond([K]))$$

p – liczba cyfr znaczących w komputerowej reprezentacji liczb

r – liczba cyfr znaczących wyniku

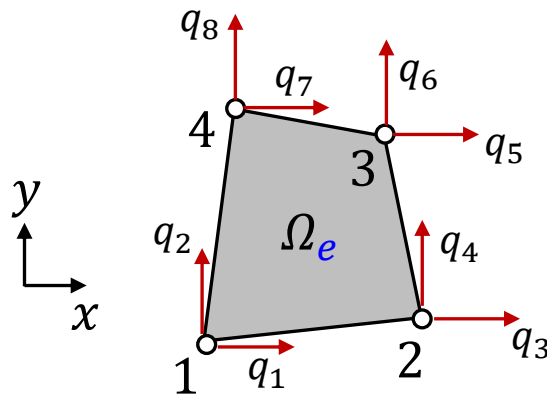
W modelach MES $cond([K])$ może osiągać poziom 10^8

Modelowanie MES – główne kroki *(przypomnienie)*



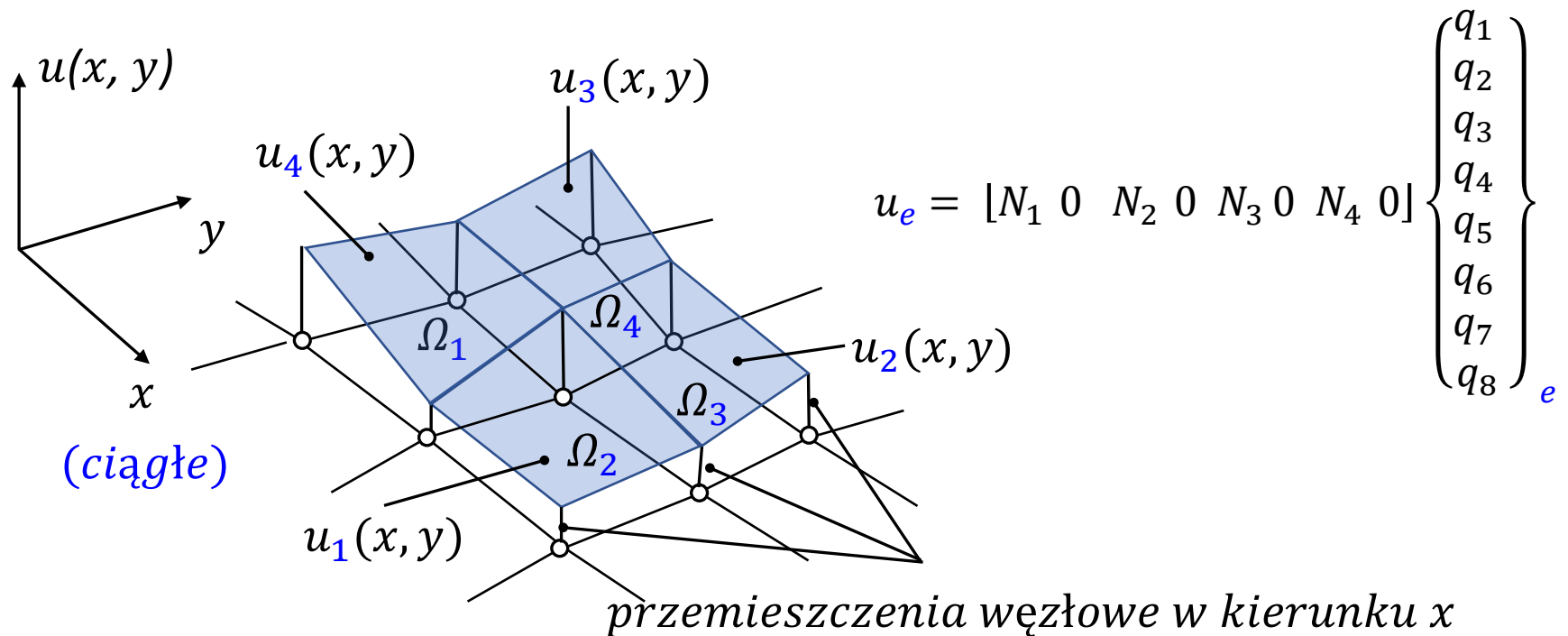
Przykład. Rozwiązanie $u(x,y)$ w zadaniu 2D.

Model MES złożony z 4-węzłowych elementów czworokątnych



$$\{u\}_{2 \times 1} = [N]_{2 \times 8} \{q\}_{8 \times 1}_e$$

$u_e(x, y)$ – przemieszczenie w kierunku x

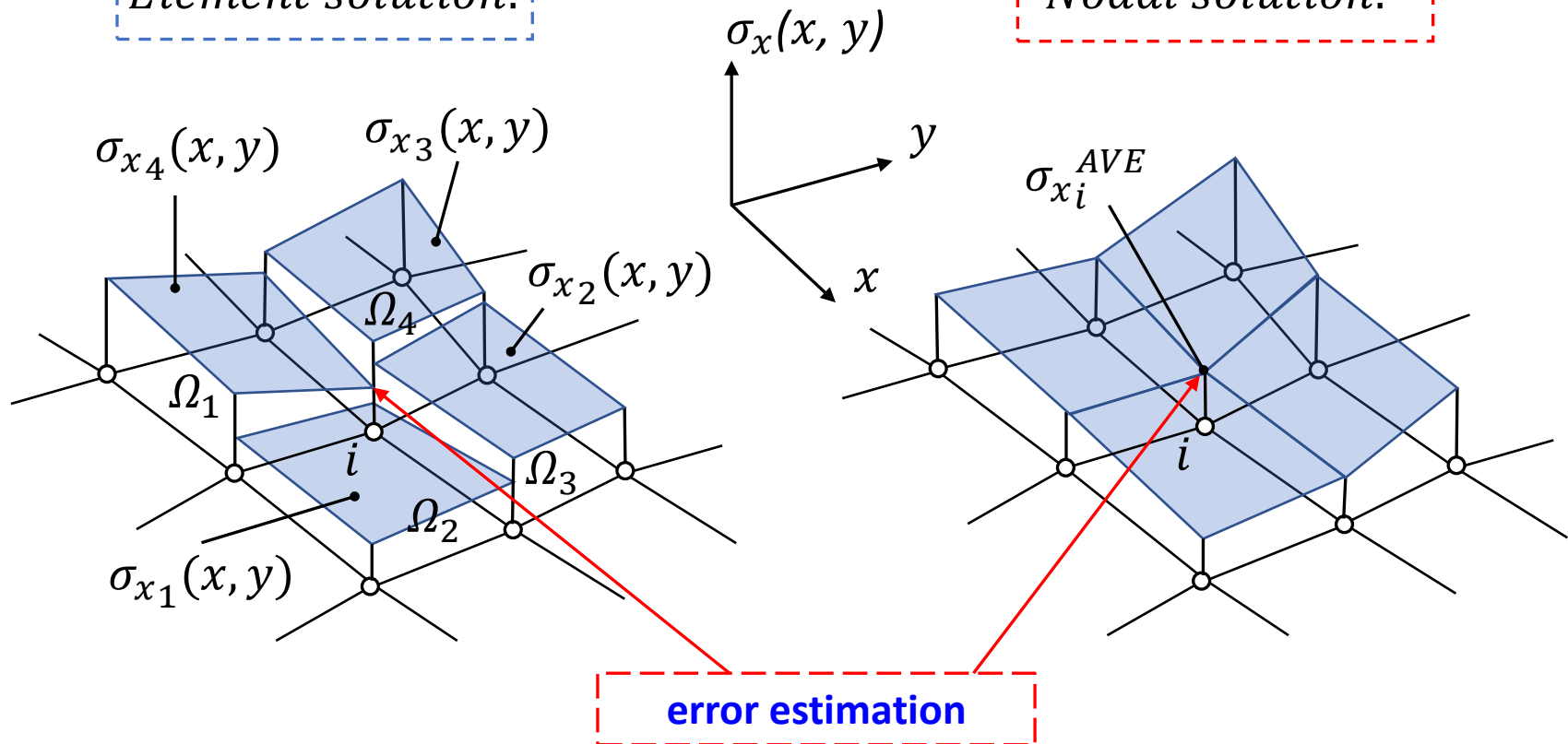


Przykład. Składowe naprężenia $\sigma_x(x, y)$ w zadaniu 2D.

Model MES złożony z 4-ęzłowych elementów czworokątnych

Element solution:

Nodal solution:



For $k = 4$:

$$\sigma_{x_i}^{AVE} = \frac{\sigma_{x_1}(x_i, y_i) + \sigma_{x_2}(x_i, y_i) + \sigma_{x_3}(x_i, y_i) + \sigma_{x_4}(x_i, y_i)}{4}$$